تمارين مقترحة

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

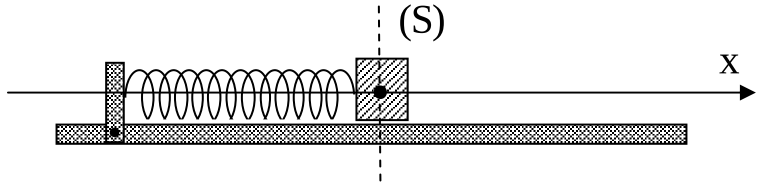
3AS U07 - Exercice 001

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (*)

لدينا نابض ثابت مرونته k = 10 N/m ، يثبت أحد طرفيه إلى نقطة في جدار شاقولي ، و بطرفه الآخر يثبت جسم صلب (S) كتلته 1 kg يستطيع أن يتحرك دون احتكاك على مستوي أفقي ، نسحب (S) أفقيا بحيث يضغط النابض بمقدار 2 cm ثم نتركه لحاله دون سرعة ابتدائية عند اللحظة t = 0 .



1- مثل القوى المؤثرة على الجسم (S) عند اللحظة t = 0 .

2- أكتب المعادلة التفاضلية للحركة بدلالة المطال x(t) ، استنتج طبيعة حركة الجسم (S) مبينا عبارة دورها الذاتي T_0 .

3- بين أن قيمة الدور الذاتي للحركة الاهتزازية هي $T_0 = 2s$.

4- أكتب المعادلة الزمنية للحركة x(t) .

5- أحسب سرعة مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن .

6- أحسب قيمة توتر النابض عند المرور بالمطال الأعظمي .

حل التمرين

1- تمثيل القوى المؤثرة عند $t=0$:

$\vec{R}$ ، $\vec{T}$ ، $\vec{P}$

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $x(t)$:

- الجملة المدروسة : جسم (S)
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي
- القوى الخارجية المؤثرة : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة التوتر $\vec{T}$
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

بالاسقاط على المحور ox :

$$-T = ma$$

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt} + Kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

هي من الشكل :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها جيبي من الشكل $x = X_0\cos(\omega t+\varphi)$ ، نستنتج أن طبيعة حركة الجسم (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة ، دورها الذاتي

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

3- قيمة الدور الذاتي T_0:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} \simeq 2s$$

4- المعادلة الزمنية للحركة:

$$x = X_0\cos(\omega t+\varphi)$$

- $X_0 = 2cm = 2.10^{-2} m$
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad/s$

من الشروط الابتدائية:

$t = 0 \rightarrow x = +X_0$

بالتعويض:

$$X_0 = X_0\cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = 1 \rightarrow \varphi = 0$$

اذن المعادلة الزمنية للحركة هي:

$$x = 2 . 10^{-2}\cos(\pi t)$$

5- سرعة مرور الجسم (S) بوضع التوازن في الاتجاه الموجب:

عند المرور بوضع التوازن تكون سرعة (S) أعظمية

وعليه:

$v = v_0 = \omega X_0$

$v = \pi . 2 . 10^{-2} = 6,28 \times 10^{-2}\ m/s$

6- توتر النابض عند المرور بالطال الأعظمي:

$T = K\Delta\ell$

عند الطال الأعظمي يكون:

$\Delta\ell = X_0$

ومنه:

$T = KX_0$

$T = 10 \times 2.10^{-2} = 0,2N$

تمارين مقترحة

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

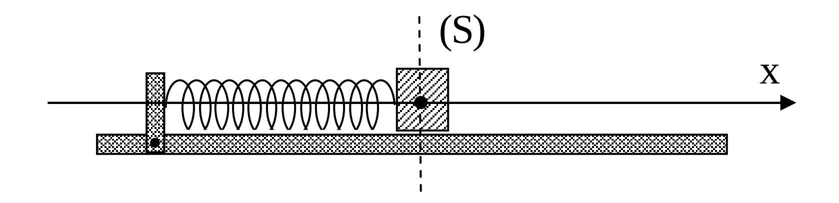
3AS U07 - Exercice 002

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

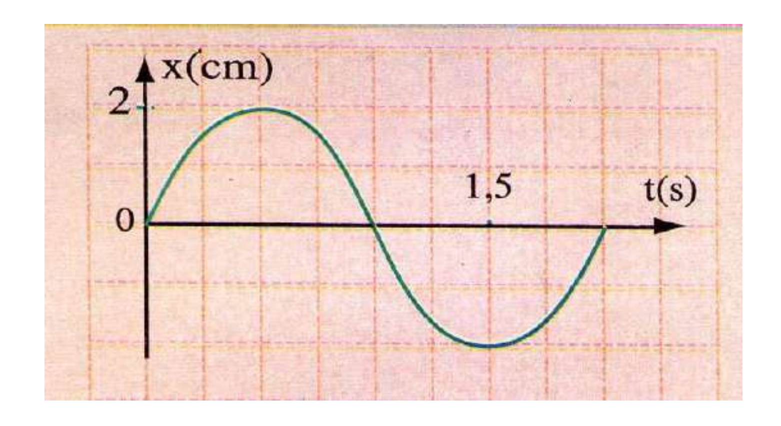
السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (*)

نواس مرن أفقي ، يتكون من نابض مرن مهمل الكتلة و حلقاتها غير متلاصقة ، ثابت مرونته k ، متصل من إحدى طرفيه بجسم صلب نقطي كتلته m ، نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بمقدار X_0 ثم نتركه حرا لحاله دون سرعة ابتدائية ، نلاحظ أن الجسم يأخذ في حركة اهتزازية دون تخامد .



الدراسة التجريبية لتطور مطال حركة هذا الجسم ، أفضت إلى البيان التالي :



1- حدد اعتمادا على هذا البيان :

أ- سعة الحركة X_0 .

ب- الدور T .

جـ- التواتر f .

د- نبض الحركة .

د- السرعة العظمى v_0.

2- أكتب المعادلة الزمنية لحركة الجسم (S) .

3- أرسم على المخطط السابق المنحنى a(t) الممثل لتغيرات تسارع مركز عطالة الجسم (S) .

حل التمرين

1- أ- سعة الحركة
سعة الحركة هو المطال الأعظمي وعليه من البيان يكون :

$X_0 = 2.10^{-2} m$

ب- دور الحركة
من البيان :

$\frac{3T}{4} = 1,5 \rightarrow T = \frac{4 \times 1,5}{3} = 2s$

جـ- التواتر :

$f = \frac{1}{T}$

$f = \frac{1}{2} = 0,5\ Hz$

د- نبض الحركة

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad/s$

هـ- السرعة الأعظمية :

$v_0 = \omega X_0$

$v_0 = \pi . 2 . 10^{-2} = 6,28 . 10^{-2}\ m/s$

2- المعادلة الزمنية للحركة

$x = X_0\cos(\omega t+\varphi)$

اعتمادا على ما سبق نكتب :

$x = 2 . 10^{-2} \cos(\pi t+\varphi)$

من الشروط الابتدائية واعتمادا على المنحنى البياني :

$t = 0 \rightarrow x = 0$

$\rightarrow v > 0$ (الاتجاه الموجب في المحور تتزايد x)

بالتعويض في $x(t)$:

$0 = 2 . 10^{-2} \cos(\pi(0)+\varphi)$

$\cos(\varphi) = 0 \longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ أو $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

نبحث عن قيمة φ التي من اجلها تكون السرعة موجبة ($v>0$) لدينا :

$v = -v_0\sin(\omega t+\varphi)$

$t = 0 \rightarrow v = -v_0\sin(\varphi)$

$\varphi = \pi/2 \rightarrow v = -v_0\sin(\pi/2) \rightarrow v < 0$ (مرفوض)

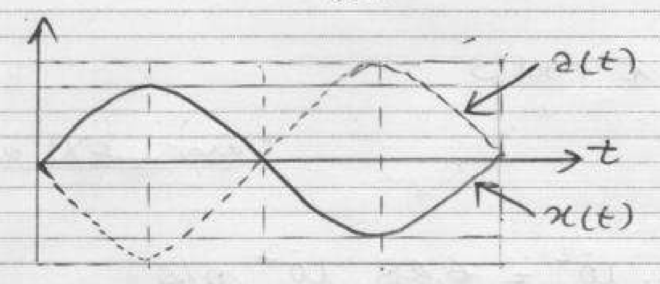
$\varphi = 3\pi/2 \rightarrow v = -v_0\sin(3\pi/2) \rightarrow v > 0$ (مقبول)

اذن قيمة φ الحقيقية هي $\varphi = 3\pi/2$ ، ومنه المعادلة الزمنية للحركة هي :

$$x = 2 \cdot 10^{-2}\cos(\pi t+\frac{3\pi}{2})$$

3- المنحنى $a(t)$:

في الحركة الاهتزازية الجيبية غير المتخامدة يكون التسارع $a(t)$ يتناسب طرديا مع المطال $x(t)$ ويعاكسه في الاشارة ، يعني a و x ينعدمان معا ، وعندما يكون المطال اعظمي موجب يكون التسارع اعظمي سالب ، وعندما يكون المطال أعظمي سالب يكون التسارع أعظمي موجب لذا يكون المنحنى $a(t)$ كما يلي :



تمارين مقترحة

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

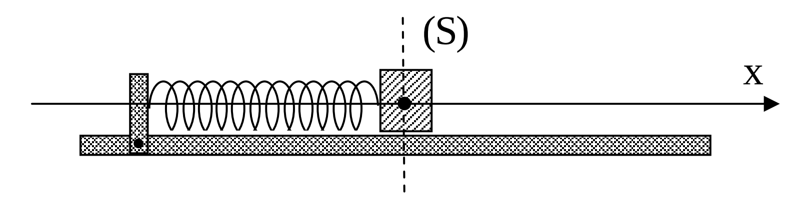
3AS U07- Exercice 003

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (*)

يتألف نواس مرن أفقي من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة و جسم صلب (S) كتلته m = 1 kg ، نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بزاوية بمقدار 1 cm ، ثم نتركه حرا لحاله دون سرعة ابتدائية ، نعتبر مبدأ الأزمنة لحظة مرور مركز عطالة الجسم (S) بوضع التوازن في الإتجاه السالب .



تتميز حركة مركز عطالة الجسم (S) بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 100\, x(t) = 0$$

1- أكتب المعادلة التفاضلية لحركة هذا الجسم بدلالة المطال x(t) .

2- بين أن حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة ، محدد عبارة نبضها ω بدلالة k ، m .

3- اعتمادا على المعادلة التفاضلية المعطاة حدد :

أ- نبض الحركة و دورها .

ب- ثابت مرونة النابض .

4- أكتب المعادلة الزمنية للحركة للمطال x(t) ، باعتبار مبدأ الأزمنة لحظة مرور مركز عطالة (S) بوضع التوازن في الإتجاه السالب .

حل التمرين

1- المعادلة التفاضلية بدلالة $x(t)$:

- الجملة المدروسة : جسم (S)
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة التوتر $\vec{T}$
- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالاسقاط على المحور ox :

$$-T = ma$$

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt} + Kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt} + \frac{K}{m}x = 0$$

2- طبيعة الحركة :

المعادلة التفاضلية هي من الشكل $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ ، وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها جيبي ، اذن طبيعة حركة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة نبضها

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

3- أ- نبض الحركة :

بمطابقة المعادلة التفاضلية المعطاة مع المعادلة التفاضلية المتحصل عليها نجد :

$$\omega^2 = 100 \rightarrow \omega = 10\,rad/s$$

ويكون :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}628\,s$$

ب- ثابت مرونة النابض :

مما سبق ،

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m} \rightarrow K = \omega^2 m$$

$$K = (10)^2 \times 1 = 100\ N/Kg$$

4- المعادلة الزمنية ،

الحركة اهتزازية جيبية معادلتها من الشكل :

$$x = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

- $X_0 = 10^{-2} m$
- $\omega = 10 rad/s$

يصبح :

$$x = 10^{-2} \cos(10t + \varphi)$$

من الشروط الابتدائية ،

$t = 0 \longrightarrow x = 0$ ، $v < 0$ (الاتجاه السالب)

بالتعويض في $x(t)$:

$$0 = 10^{-2} \cos(10(0) + \varphi)$$

$$\cos\varphi = 0 \ \rightarrow \ \varphi = \frac{\pi}{2} \ \text{أو} \ \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

بالتعويض في معادلة السرعة عند اللحظة $t=0$:

$\varphi = \pi/2 \ \rightarrow \ v = -v_0 \sin(\pi/2) \ \rightarrow \ v < 0$ (مقبول)

$\varphi = 3\pi/2 \ \rightarrow \ v = -v_0 \sin(3\pi/2) \ \rightarrow \ v > 0$ (مرفوض)

اذن : $\varphi = \pi/2$ ومنه المعادلة تصبح :

$$x = 10^{-2} \cos(10t + \frac{\pi}{2})$$

د- المعادلة الزمنية للسرعة ،

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = -10 \cdot 10^{-2} \sin(10t + \frac{\pi}{2})$$

$$v = -0.1 \sin(10t + \frac{\pi}{2})$$

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

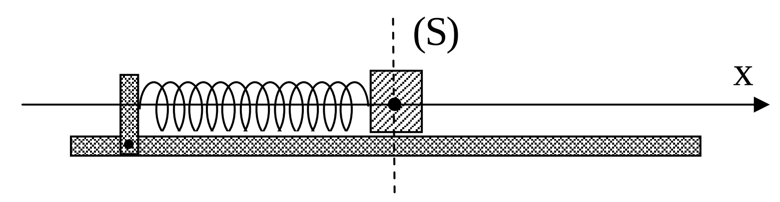
3AS U07 - Exercice 004

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

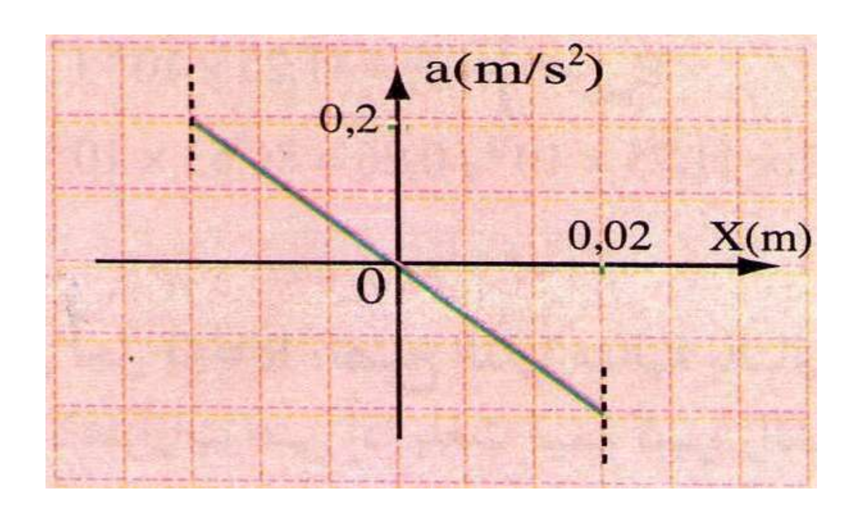
السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (*)

نواس مرن أفقي ، يتكون من نابض مرن مهمل الكتلة و حلقاتها غير متلاصقة ، ثابت مرونته k ، متصل من إحدى طرفيه بجسم صلب (S) كتلته m .



المخطط البياني التالي يمثل تطور تسارع مركز عطالة الجسم (S) بدلالة مطال الحركة x .



1- استنتج من البيان طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) .

2- أحسب النبض ω_0 الذاتي للحركة الاهتزازية .

يعطى : $\pi^2 = 10$

حل التمرين

1- طبيعة الحركة:

المنحنى $a(x)$ الذي هو عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ وميله سالب، هذا يعني أن تسارع الحركة يتناسب طرديا مع المطال ويعاكسه في الإشارة، هذا لا يتحقق إلا في الحركة الاهتزازية الجيبية غير المتخامدة، إذن طبيعة حركة مركز عطالة

2- الدور الذاتي T_0:

بيانيا:

$$a = \alpha x \quad \text{.......(1)}$$

نظريا: الحركة اهتزازية جيبية، لذا يكون:

$$x = X_0\cos(\omega t+\varphi)$$

ومنه:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega X_0 \sin(\omega t+\varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 X_0 \cos(\omega t+\varphi)$$

وكون أن: $x = X_0\cos(\omega t+\varphi)$ ومنه يصبح:

$$a = -\omega^2 x \quad \text{.......(2)}$$

بمطابقة العلاقة البيانية (1) والنظرية (2) يكون:

$$-\omega^2 = a \longrightarrow \omega = \sqrt{-a}$$

من البيان:

$$a = -\frac{0{,}2}{0{,}02} = -10$$

إذن:

$$\omega = \sqrt{-(-10)} = \sqrt{10} = \sqrt{\pi^2} \Rightarrow \omega = \pi \ rad/s$$

تمارين مقترحة

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

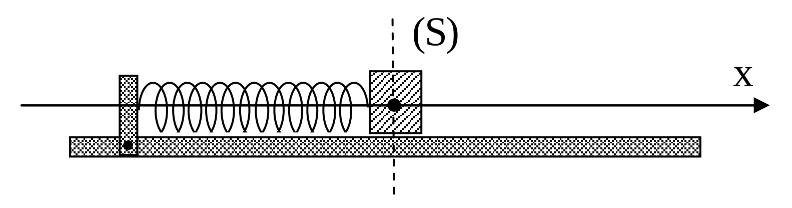
3AS U07 - Exercice 005

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (*)

يتألف نواس مرن أفقي من نابض ثابت مرونته k حلقاتها غير متلاصقة مهمل الكتلة و جسم صلب (S) كتلته m = 200 g .



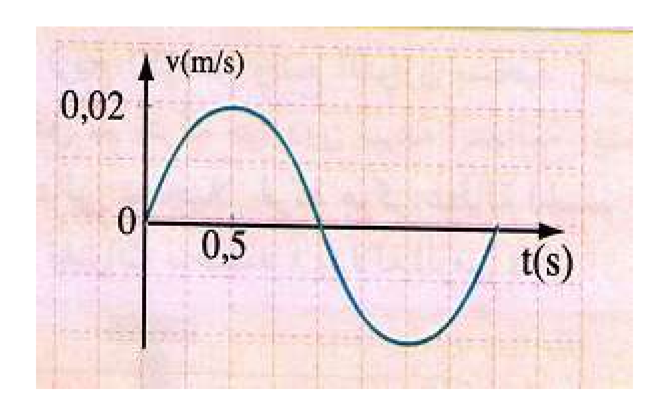
1- نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بمقدار X_0 ، نلاحظ أن الجسم يأخذ حركة اهتزازية حول موضع توازنه أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة x(t) .

أ- محددا طبيعة الحركة و عبارة دورها الذاتي T_0 .

ب- بين بالتحليل البعدي أن الدور متجانس مع الزمن .

جـ- بين أن المعادلة التفاضلية السابقة تقبل المعادلة $q = X_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$.

2- البيان التالي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة الجسم (S) بدلالة الزمن .



- اعتمادا على البيان حدد :

أ- دور الحركة الذاتي T_0 و نبضها الذاتي ω_0 .

ب- ثابت مرونة النابض k .

جـ- المطال الأعظمي X_0 للحركة الاهتزازية .

د- اللحظات التي يكون فيها المطال أعظميا (خلال الدور الأول).

3- احسب الطاقة الحركية الأعظمية للجسم (S) .

يؤخذ : $\pi^2 = 10$.

حل التمرين

1- المعادلة التفاضلية للحركة :

- الجملة المدروسة : جسم (S)
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة التوتر $\vec{T}$
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة :

$$-T = ma$$

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0}$$

هي من الشكل :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها جيبي من الشكل : $x = X_0\cos(\omega t+\varphi)$ ، إذن طبيعة حركة مركز عطالة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة دورها الذاتي :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m_0}}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{K}}$$

2- أ- دور الحركة :

من البيان :

$T_0 = 4 \times 0,5 = 2s$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ rad/s$

ب- ثابت مرونة النابض :

مما سبق

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m} \rightarrow K = \omega^2 m$

$K = \pi^2 . 0,2 = 2 \ N/m$

جـ- المطال الأعظمي :

من البيان : $v_0 = 0,02 \ m/s$

حيث : v_0 هي السرعة الأعظمية

ولدينا :

$v_0 = \omega^2 X_0 \rightarrow X_0 = \frac{v_0}{\omega^2}$

$X_0 = \frac{0,02}{\pi^2} = 2.10^{-3} m$

3- اللحظات التي يكون فيها المطال أعظمي :

يكون المطال أعظمي عندما تكون السرعة معدومة، ومن المنحنى تكون السرعة معدومة عند اللحظات :

$t = 0$ و $t = 1s$ و $t = 1,5s$

4- الطاقة الحركية الأعظمية :

$E(c)_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$

$E(c)_0 = \frac{1}{2} \times 0,2 \ (0,02)^2 = 4.10^{-5} J$

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

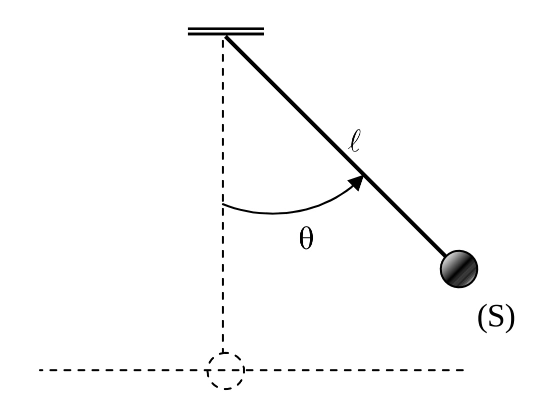
3AS U07 - Exercice 006

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (*)

نواس بسيط يتكون من خيط مهمل الكتلة و عديم الامتطاط طوله $\ell = 1\ m$ و جسم نقطي (S) كتلته m ، نزيح النواس في اللحظة t بزاوية θ_0 .



1- بتطبيق قانون نيوتن الثاني في لحظة كيفية t يكون فيها الخيط يصنع الزاوية θ مع الشاقول ، بين أن المعادلة التفاضلية بدلالة θ(t) المميزة للحركة من أجل السعات الزاوية الصغيرة تكون من الشكل :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

حيث ω هو ثابت يميز طبيعة الحركة يطلب التعبير عنه بدلالة طول الخيط ℓ و شدة الجاذبية g .

2- أثبت أن هذه المعادلة التفاضلية تقبل المعادلة $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$ كحل لها .

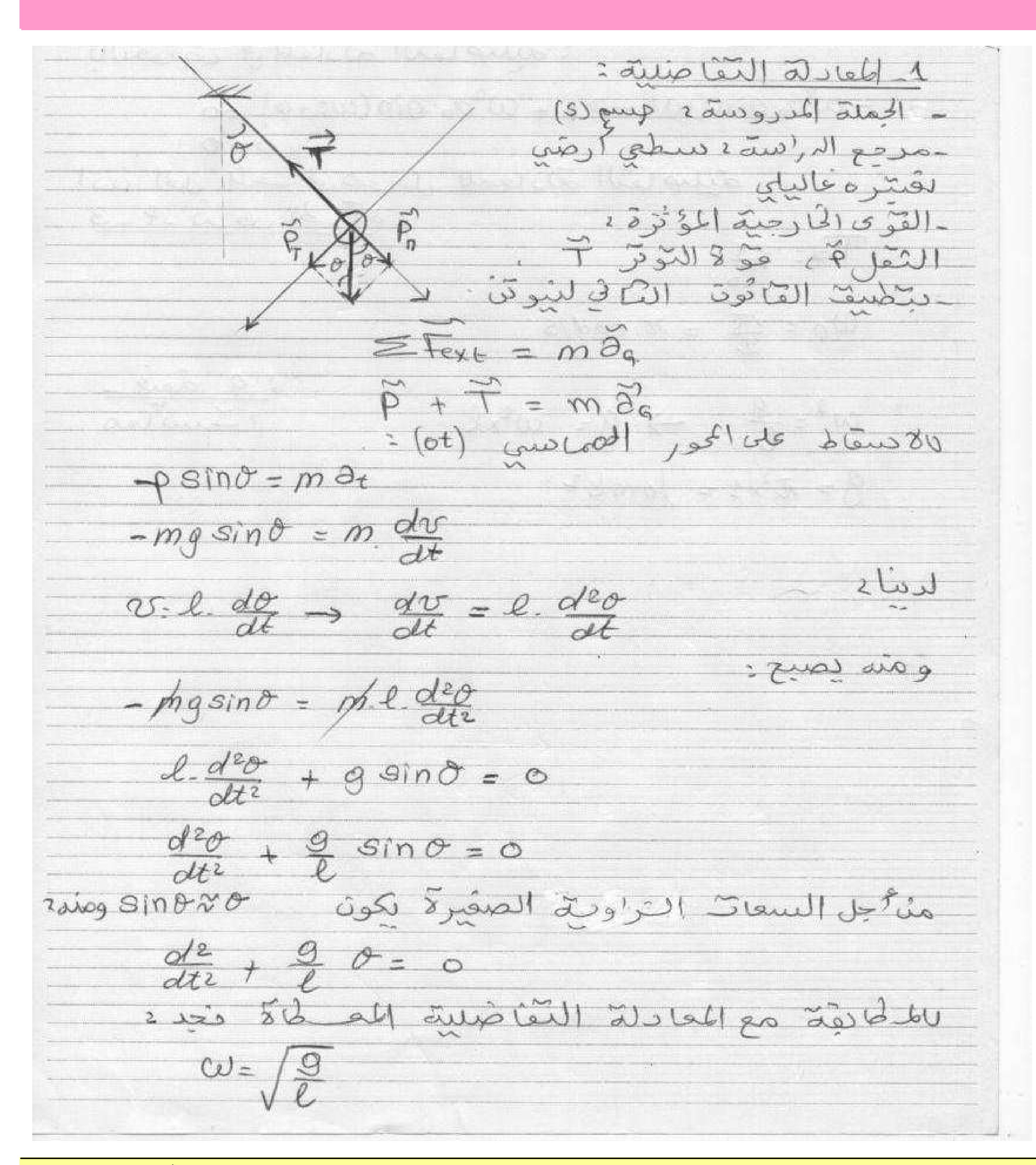
3- دور الحركة الاهتزازية الذاتي من أجل السعات الصغيرة هو $T_0 = 2s$ ، أوجد :

أ- النبض الذاتي ω_0 للحركة الاهتزازية .

ب- قيمة الجاذبية الأرضية في مكان التجربة .

يعطى : $\pi^2 = 10$

حل التمرين



1- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : جسم (S)
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي
- القوى الخارجية المؤثرة :

الثقل $\vec{P}$ ، قوة التوتر $\vec{T}$ ،

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

بالاسقاط على المحور المماسي (ot) :

$$-P\sin\theta = m a_t$$

$$-mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt}$$

لدينا :

$$v = l\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ومنه يصبح :

$$-mg\sin\theta = m l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

من أجل السعات الزاوية الصغيرة يكون $\sin\theta \simeq \theta$ ومنه :

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة نجد :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ج- التحقق من حل المعادلة التفاضلية:

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega\theta_0\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta_0\cos(\omega t+\varphi)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$-\omega^2\theta_0\cos(\omega t+\varphi) + \omega^2 . \theta_0\cos(\omega t+\varphi) = 0$$

$$0 = 0$$

اذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية

3- أ- نبض الحركة:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad/s$$

- قيمة g:

مما سبق:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \rightarrow g = \omega^2 \times l$$

$$g = \pi^2 \times 1 = 10 m/s^2$$

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

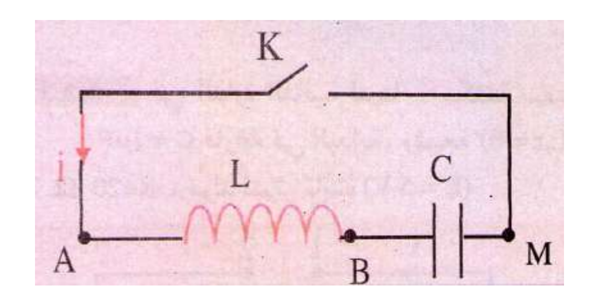
3AS U07 - Exercice 007

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (*)

تتكون الدراة المبينة في الشكل التالي على التسلسل من وشيعة ذاتيتها $L = 1.0\ H$ و مقاومتها الداخلية مهملة ، مكثفة سعتها $C = 22\ mF$ شحنت كليا تحت توتر ثابت $(E = 3.0\ V)$ ، نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$ فتتفرغ المكثفة في الوشيعة بشكل دوري .



1- ما هي الظاهرة التي تحدث في الدارة ؟
2- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة شحنة المكثفة $q(t)$.
3- حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل $q = A\cos(Bt)$ ، حيث A ، B يطلب التعبير عنهم .
4- أكتب العبارة الحرفية للدور الذاتي T_0 بدلالة C ، L ، ثم أحسب قيمته .
5- أكتب العبارة اللحظية لشدة التيار الكهربائي الماء بالدارة .
6- أحسب قيمة شدة التيار الكهربائي العظمى I_0 .

حل التمرين

1- الظاهرة التي تحدث في الدارة؟
لا توجد مقاومة في الدارة كما أن المقاومة الداخلية للوشيعة مهملة، بعبارة أخرى لا توجد مقاومة في الدارة، وبالتالي لا يوجد ضياع في الطاقة، إذن الظاهرة الملاحظة هي اهتزازات كهربائية جيبية غير متخامدة.

2- المعادلة التفاضلية بدلالة الشحنة $q(t)$:
حسب قانون جمع التوترات:

$$u_b + u_c = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

وحيث أن $i = \frac{dq}{dt}$ يصبح:

$$L\cdot\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

3- عبارة A و B:

- $q = A\cos(Bt)$
- $\frac{dq}{dt} = -AB\sin(Bt)$
- $\frac{d^2q}{dt^2} = -AB^2\cos(Bt)$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$-AB^2\cos(Bt) + \frac{1}{LC}A\cos(Bt) = 0$$

$$A\cos(Bt)\left(-B^2 + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن تكون:

$$-B^2 + \frac{1}{LC} = 0 \longrightarrow \frac{1}{LC} = B^2 \longrightarrow B = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

من الشروط الابتدائية :

$t=0 \rightarrow q=Q_0$

بالتعويض في المعادلة $q(t)$

$Q_0 = A\cos(B(0)) \rightarrow A = Q_0$

ب- الدور الذاتي :

المعادلة التفاضلية السابقة هي من الشكل :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$$

حيث :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ولدينا :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$T = 2\pi\sqrt{1 \times 22 \times 10^{-3}} = 0{,}93\,s$$

5- العبارة اللحظية لشدة التيار :

مما سبق يمكن كتابة :

$$q = Q_0 \cos(\omega t)$$

حيث :

$$\omega = B = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

لدينا :

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow i = -\omega Q_0 \cos(\omega t)$$

6- قيمة I_0 :

العبارة السابقة $i(t)$ هي من الشكل :

$$i = -I_0 \cos(\omega t)$$

حيث $I_0 = \omega Q_0$ وهي شدة التيار الأعظمية

وبما أن $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ، $Q_0 = EC$ نكتب :

$$I_0 = \frac{2\pi}{T} \cdot EC \rightarrow I_0 = \frac{2\pi EC}{T}$$

$$I_0 = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 22 \cdot 10^{-3}}{0{,}93} \simeq 0{,}451\,A$$

تمارين مقترحة

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

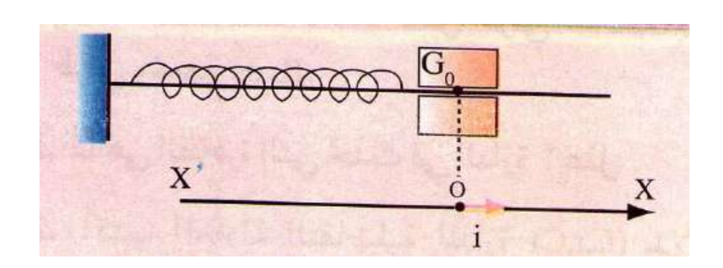
3AS U07 - Exercice 008

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

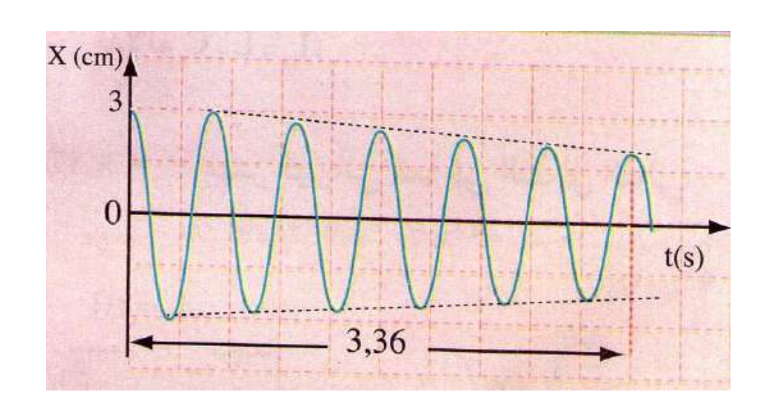
السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (*)

نواس مرن أفقي يتكون من جسم صلب (S) كتلته $m = 100\ g$ و نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة و ثابت مرنته $k = 13\ N/kg$، الجسم (S) بإمكانه الحركة على ساق أفقية كما مبين في الشكل التالي :



عند اللحظة $t = 0$ يكون الجسم (S) متوازنا و يكون مركز عطالته G منطبق على مبدأ الفواصل O ، عند اللحظة t يمر مركز العطالة G من نقطة مطالها x بسرعة v .
بواسطة تجهيز مناسب تمكنا من متابعة تغيرات المطال x بدلالة الزمن t فتحصلنا على البيان التالي :



1- ما هو نمط الاهتزازات ؟
2- أحسب قيمة شبه الدور T للإهتزازات ؟
3- أكتب عبارة طاقة الجملة (جسم + نابض) بدلالة m ، k ، x ، v .
4- حدد من البيان قيم المطال x عند اللحظات : $t_0 = 0$ ، $t_1 = T$ ، $t_2 = 5T$ ثم أحسب طاقة الجملة في هذه اللحظات مع الشرح .
5- قارن بين القيم المتحصل عليها ، ما هو سبب التغير في طاقة الجملة ؟

حل التمرين

1- نمط الاهتزازات حرة متخامدة.

2- قيمة شبه الدور:

من البيان

$6T = 3,36\ s \longrightarrow T = \frac{3,36}{6} = 0,56\ s$

3- عبارة طاقة الجملة بدلالة m ، K ، x ، v:

تمتلك الجملة (جسم+نابض) في لحظة t من اهتزازتها طاقة حركية $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ و طاقة كامنة مرونية $E_{Pe} = \frac{1}{2}Kx^2$ ، فاذا اعتبرنا وضع الجملة في حالة التوازن مرجعا لحساب الطاقة الكامنة المرونية ، أين يصبح المطال x مساوي لاستطالة النابض ، تكون عبارة طاقة الجملة (جسم+نابض) كما يلي:

$$E = E_C + E_{Pe} \longrightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

4- قيمة المطال والطاقة عند اللحظات $t=0$ ، $t=T$ ، $t=5T$:

من البيان:

- $t=0 \rightarrow x = 3\ cm$
- $t=T \rightarrow x = 3\ cm$
- $t=5T \rightarrow x = 2,25\ m$

- في اللحظات $t=0$ ، T ، $5T$ يكون المطال أعظمي وعليه في هذه اللحظات تكون الطاقة الكامنة المرونية أعظمية في حين تكون الطاقة الحركية معدومة ، وعليه تصبح عبارة طاقة الجملة في اللحظات المذكورة كما يلي.

$$E = \frac{1}{2}Kx^2$$

اذن:

- $t=0 \rightarrow x = 3\ cm \rightarrow E = \frac{1}{2}\times 13\,(3.10^{-2})^2 = 5,85.10^{-3}\ J$
- $t=T \rightarrow x = 3\ cm \rightarrow E = \frac{1}{2}\times 13\,(3\times 10^{-2})^2 = 5,85.10^{-3}\ J$
- $t=5T \rightarrow x = 2,25\ cm \rightarrow E = \frac{1}{2}.13\,(2,25.10^{-2})^2 = 32,9.10^{-3}\ J$

5- المقارنة بين الطاقات :
نلاحظ أن طاقة الجملة تتناقص لمرور الزمن ، السبب في ذلك راجع إلى الاحتكاكات بين الجسم الصلب (S) والساق .

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

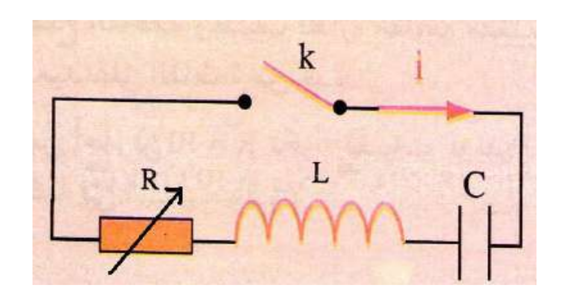
3AS U07 - Exercice 009

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

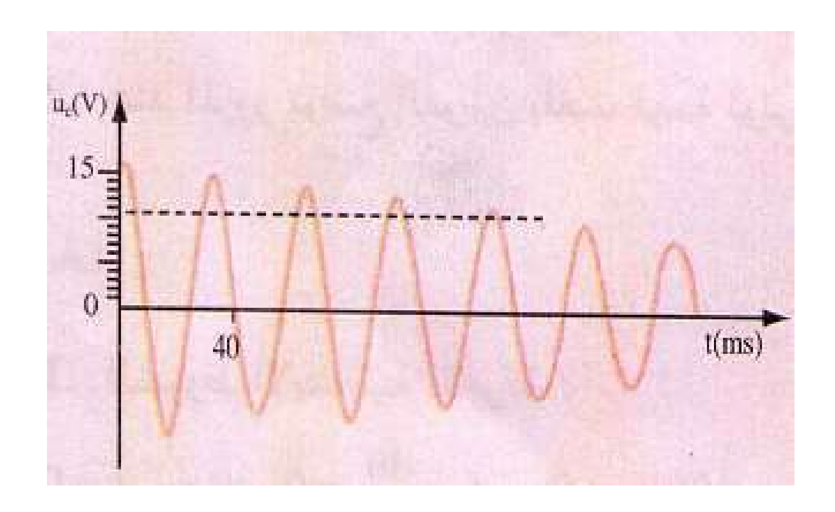
السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (*)

جزء من دارة كهربائية تتكون على التسلسل من : مكثفة سعتها $C = 10^{-4}$ F شحنت تحت توتر قدره 15V ، وشيعة ذاتيها L و مقاومتها الداخلية مهملة $(r = 0)$ معدلة (ناقل أومي ذو مقاومة متغيرة) .



نتابع تغيرات التوتر u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن فنحصل على البيان التالي :



1- ما هو نمط الإهتزازات ؟ علل .
2- عين قيمة شبه دور الاهتزازات T .
3- أحسب ذاتية الوشيعة باعتبار الدور T يقترب من الدور الذاتي T_0 .
4- أحسب الطاقة الأعظمية للدارة .
5- أحسب الطاقة الضائعة عند نهاية الاهتزازة الرابعة .
6- أحسب الشدة الأعظمية للتيار الكهربائي .
7- كيف يصبح نمط الاهتزازات إذا كانت قيمة R كبيرة جدا ، مثل في هذه الحالة و بشكل كيفي تطور التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

يعطى : $\pi^2 = 10$

حل التمرين

1- نمط الاهتزازات:

الجملة المهتزة (R,L,C) لا تتلقى طاقة من الوسط الخارجي أثناء الاهتزازات لذا فالاهتزازات حرة، وبما أن الدارة تحتوي على ناقل أومي (مقاومة)، فهذه الأخيرة تعتبر تسبب في تخامد هذه الاهتزازات كون أن طاقة الجملة تضيع على شكل حرارة بفعل جول في الناقل الأومي، إذن نمط الاهتزازات في الدارة (R,L,C) حرة متخامدة.

3- قيمة شبه الدور:

من البيانات:

$$\frac{5T}{4} = 40ms \rightarrow T = \frac{4\times 40}{3} = 32ms$$

3- ذاتية الوشيعة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 LC \rightarrow L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}$$

$$L = \frac{(32\times 10^{-3})^2}{4\pi^2 . 10^{-4}} = 0,256\,H$$

4- الطاقة الأعظمية للدارة:

تكون طاقة الجملة (R,L,C) أعظمية عند اللحظة $t=0$، أين تكون طاقة المكثفة أعظمية وطاقة الوشيعة عندئذ معدومة، أي:

$$E_{max} = E_{(C)max} = \frac{1}{2} C U_{Cmax}^2$$

من البيان: $U_{Cmax} = 15V$ ومنه،

$$E_{max} = \frac{1}{2} . 10^{-4} (15)^3 = 1,25\times 10^{-2} J$$

و

5- الطاقة الضائعة في نهاية الاهتزازة الرابعة:

في نهاية الاهتزازة الرابعة يكون التوتر u_C في قيمته الحدية عندها تكون طاقة الوشيعة معدومة، وكون أن طاقة المكثفة $U_C = \frac{1}{2} C u_C^2$، تكون طاقة الجملة (R,L,C) عند نهاية الاهتزازة الرابعة هي:

$$E = E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

من البيان ، عند نهاية الاهتزازة الرابعة يكون $u_C = 11V$
ومنه طاقة الجملة (R,L,C) عند هذه اللحظة هي :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} 10^{-4} (11)^2 = 6,02 \times 10^{-3} J$$

الطاقة الضائعة هي النقصان في الطاقة بين اللحظة $t=0$ ونهاية الاهتزازة الرابعة ، فاذا اعتبرنا الطاقة الضائعة هي E' يكون :

$$E' = E_0 - E$$

$$E' = 1,125 . 10^{-2} - 6,05 . 10^{-3} = 0,1052 J$$

6- شدة التيار الاعظمية :

تكون شدة التيار الكهربائي في اعظم قيمة لها عندما تكون طاقة الوشيعة في اعظم قيمة لها ، وأعظم قيمة لطاقة الوشيعة $E_{(L)max}$ لا تتعدى طاقة الدارة (R,L,C) الاعظمية أي :

$$E_{(L)max} = E_{max} = 1,125 . 10^{-2} J$$

ولدينا :

$$E_{(L)max} = \frac{1}{2} L I_0^2 \rightarrow I_0 = \sqrt{\frac{2E_{(L)max}}{L}}$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \times 1,125 \times 10^{-2}}{0,256}} \approx 0,30 A$$

7- نمط الاهتزازات عندما تكون R كبيرة جدا :

بازدياد قيمة المقاومة R يزداد تخامد الاهتزازات الكهربائية وعندما تكون قيمة المقاومة كبيرة جدا يصبح نظام الدارة لادوري (حرجا) ، في هذه الحالة يصبح شكل تطور الدارة $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة كما يلي :

$u_C(V)$

t

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

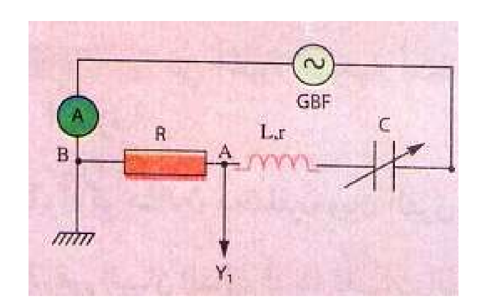
3AS U07 - Exercice 010

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (*)

يتكون جزء من دارة كهربائية على التسلسل من ناقل أومي مقاومته $R = 10\ \Omega$ و وشيعة ذاتيها $L = 1\ H$ ، مقاومتها الداخلية r مجهولة ، مكثفة سعتها C متغيرة .

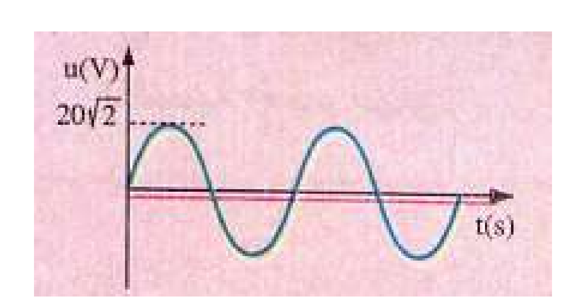


تغذى الدارة بتوتر متناوب جيبي عبارته :

$$u = 50\sqrt{2}\sin(100t + \varphi_0)$$

حيث يقدر u بالفولط (V) و t بالثانية (s) .

نصل طرفي الناقل الأومي إلى راسم الاهتزاز المهبطي فيظهر على الشاشة المنحنى u(t) التالي :



1- ماذا تمثل القيمة التي يشير إليها مقياس الأمبير .

2- أحسب الشدة المنتجة للتيار I_{eff} .

3- أحسب ممانعة الدارة Z .

4- إذا علمت أن استطاعة التحويل الحراري الضائعة بالدارة هي $P = 60\ W$ ، عين المقاومة الداخلية r للوشيعة .

5- نغير سعة المكثفة حتى يشير مقياس الأمبير إلى قيمة أعظمية يبدأ بعدها بالتناقص .

أ- ما هي الحالة الكهربائية للدارة عندما تكون الشدة المنتجة للتيار أعظمية .

ب- أحسب سعة المكثفة في هذه الحالة .

حل التمرين

1- القيمة التي يشير اليها مقياس الامبير

في حالة دارة مغذاة بتيار متناوب جيبي يقيس كل من مقياس الفولط ومقياس الأمبير القيم المنتجة للتوتر والتيار على الترتيب، اذن مقياس الأمبير في الدارة (R,L,C) يقيس شدة التيار المنتجة I_{eff} في هذه الدارة.

2- قيمة شدة التيار المنتجة:

$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

لدينا حسب قانون أوم بين طرفي ناقل أومي

$$u_R = Ri$$

ومنه نكتب:

$$U_{Rmax} = R I_{max} \rightarrow I_{max} = \frac{U_{Rmax}}{R}$$

ومنه يصبح:

$$I_{eff} = \frac{\frac{U_{Rmax}}{R}}{\sqrt{2}} \rightarrow I_{eff} = \frac{U_{Rmax}}{\sqrt{2}\, R}$$

من البيان: $U_{Rmax} = 20\sqrt{2}\,V$ ومنه:

$$I_{eff} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times 10} = 2A$$

3- ممانعة الدارة Z:

لدينا:

$$U_{eff} = Z\, I_{eff} \rightarrow Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$$

من عبارة التيار المتناوب المغذي للدارة لدينا:

$$U_{max} = 50\sqrt{2}\,V$$

وحيث أن: $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ يكون:

$$U_{eff} = \frac{50\sqrt{2}}{2} = 50V$$

ومنه:

$$Z = \frac{50}{2} = 25\,\Omega$$

طريقة ثانية:

$$Z = \frac{U_{max}}{I_{max}}$$

من عبارة التوتر المغذي للدارة: $U_{max} = 50\sqrt{2}\,V$

لدينا سابقا، $I_{eff}=2A$ وحيث أن: $I_{eff}=\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$

يكون:

$$I_{max}=I_{eff}\sqrt{2}=2\sqrt{2}A$$

ومنه،

$$Z=\frac{50\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=25\Omega.$$

4- قيمة r:

$$P=R_T I_{eff}^2=(R+r)I_{eff}^2$$

$$(R+r)=\frac{P}{I_{eff}^2}\rightarrow r=\frac{P}{I_{eff}^2}-R$$

$$r=\frac{(60)^2}{(2)^2}-10=5\Omega.$$

5- أ- الحالة الكهربائية للدارة عندما تكون شدة التيار المنتجة أعظمية هي حالة التجاوب.

ب- سعة المكثفة عند التجاوب

عند التجاوب تتساوى قيمة نبض التوتر المغذي للدارة ω مع النبض الذاتي للدارة أي:

$$\omega_0=\omega\Rightarrow\omega_0^2=\omega^2$$

وحيث أن:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\rightarrow\omega_0^2=\frac{1}{LC}$$

يكون:

$$\frac{1}{LC}=\omega^2\rightarrow C=\frac{1}{L\omega^2}$$

من عبارة التوتر الكهربائي الجيبي المغذي للدارة لدينا $\omega=100rad/s$

ومنه،

$$C=\frac{1}{1(100)^2}=10^{-4}F$$

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

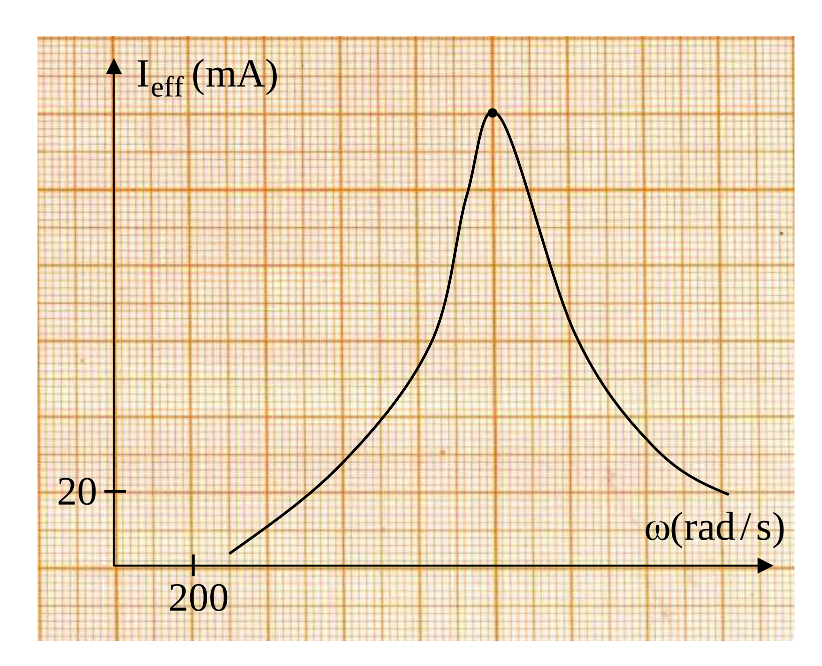
3AS U07 - Exercice 011

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (*)

دارة كهربائية تضم على التسلسل وشيعة ذاتيتها $L = 0.8\ H$ و مقاومتها الداخلية r ، مكثفة سعتها C ، نغذي الدارة بتيار متناوب جيبي عبارته : $u = 24\sqrt{2}\sin(\omega t)$. الشكل التالي يمثل تغيرات الشدة المنتجة I_{eff} بدلالة النبض ω .



1- أوجد عند التجاوب :

- النبض الذاتي ω_0 للدارة (R,L,C) .
- الشدة المنتجة I_{eff0} .

2- عندما تكون الإستطاعة المتوسطة المحولة بفعل جول في الدارة (R,L,C) نصف الاستطاعة الأعظمية المحولة بفعل جول في نفس الدارة ($P = \frac{P_0}{2}$) :

أ- أثبت :

$$I_{eff}\ \frac{I_{eff\,0}}{\sqrt{2}}$$

ب- أحسب هذه القيمة ثم استنتج من البيان النبضين ω_1 ، ω_2 الموافقين لها حيث : $\omega_1 < \omega_2$.

3- أحسب عرض الشريط النافذ $\Delta\omega$ و عامل الجودة Q .

4- أحسب ذاتية الوشيعة L و سعة المكثفة C .

حل التمرين

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

3AS U07 - Exercice 012

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (بكالوريا 2009 - رياضيات) (*)

يتكون نواس مرن من جسم صلب نقطي (S) كتلته $m = 250g$ يمكنه الحركة على مستو أفقي، ومن نابض حلقاته غير متلاصقة، كتلته مهملة، ثابت مرونته $k = 25N/m$. (الشكل المقابل).

x (S) O x'

عند التوازن يكون (S) عند النقطة 0 (مبدأ الفواصل للمحور $\overrightarrow{xx'}$).

نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بمقدار $X_{max} = 2cm$، في اتجاه $\overrightarrow{xx'}$ و نتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $(t = 0s)$.

1/ بفرض الاحتكاكات مهملة :

أ / مثّلْ القوى المؤثرة على الجسم (S) في لحظة كيفية (t).

ب/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.

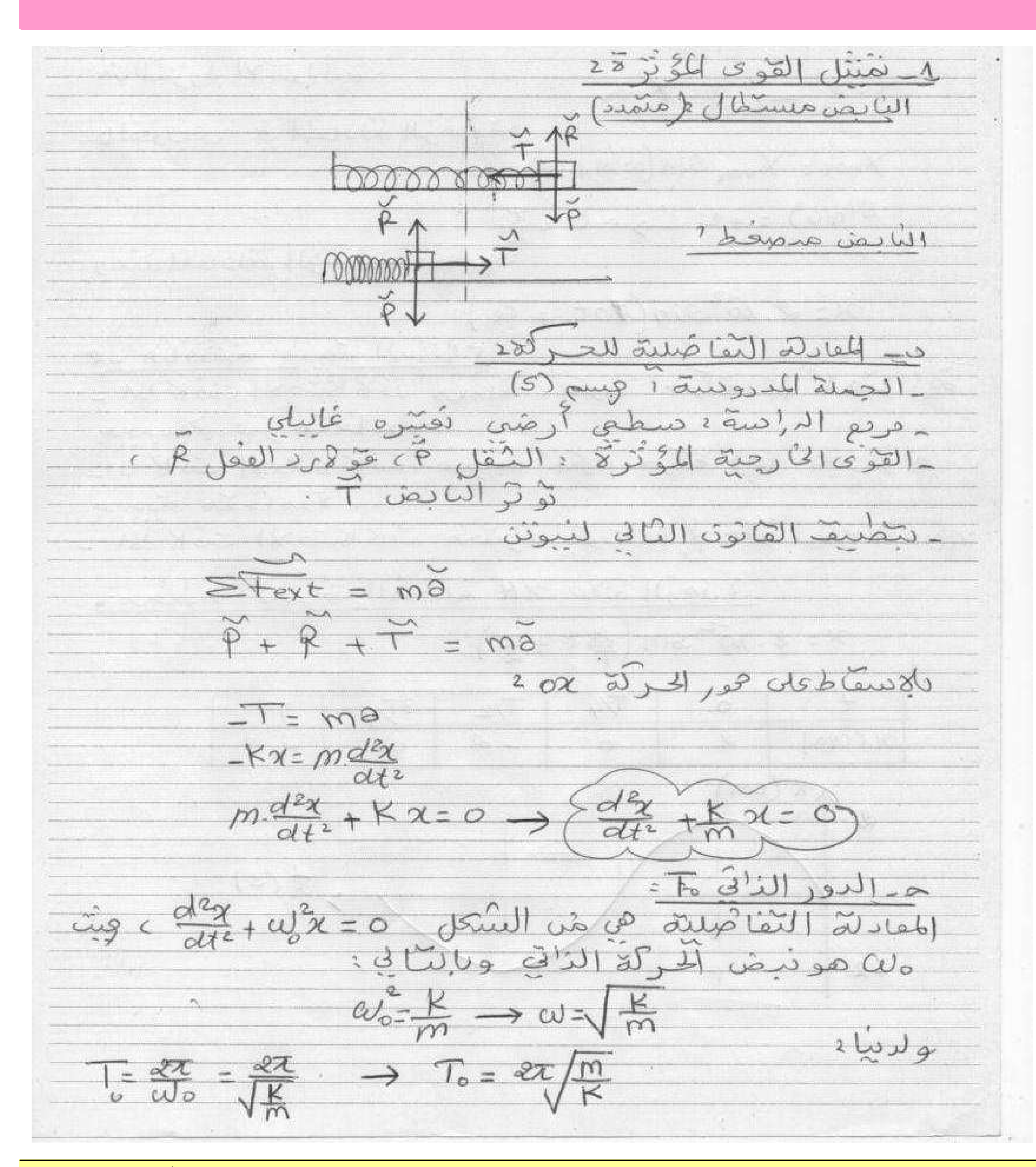
جـ/ أحسب الدور الذاتي T_0 للجملة المهتزة ثم أكتب المعادلة الزمنية للحركة $x = f(t)$.

2/ في الحقيقة الاحتكاكات غير مهملة، حيث يخضع (S) اثناء حركته لقوة احتكاك فتصبح المعادلة التفاضلية للحركة من الشكل :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + \lambda x = 0$$

نَاقِشْ حسب قيم قوة الاحتكاك النظام الذي تكون عليه حركة (S)، ثم مثل عندئذ تغيرات الفاصلة x بدلالة الزمن الموافق لكل حالة.

حل التمرين



1- تمثيل القوى المؤثرة:

النابض مستطال (ممتد)

النابض مضغوط:

ب- المعادلة التفاضلية للحركة:

- الجملة المدروسة: جسم (S)
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي
- القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec P$، قوة رد الفعل $\vec R$، توتر النابض $\vec T$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن

$$\sum \vec F_{ext} = m\vec a$$

$$\vec P + \vec R + \vec T = m\vec a$$

بالإسقاط على محور الحركة ox:

$$-T = ma$$

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

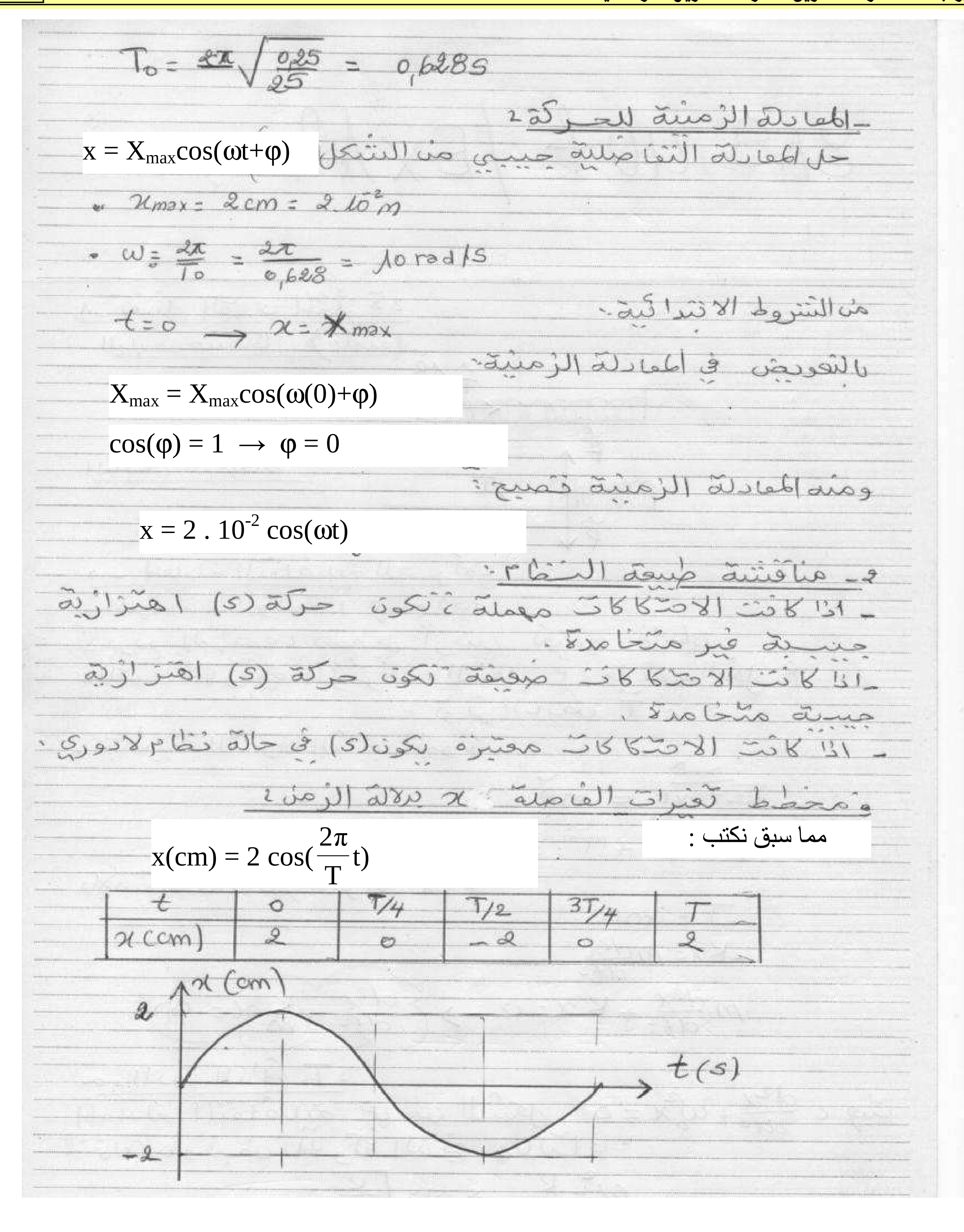
جـ- الدور الذاتي T_0:

المعادلة التفاضلية هي من الشكل $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$، حيث ω_0 هو نبض الحركة الذاتي وبالتالي:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

ولدينا:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}25}{25}} = 0{,}628\,s$$

- المعادلة الزمنية للحركة :

حل المعادلة التفاضلية جيبي من الشكل $x = X_{max}\cos(\omega t+\varphi)$

- $x_{max} = 2cm = 2.10^{-2}m$
- $\omega = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0{,}628} = 10\,rad/s$

من الشروط الابتدائية :

$t = 0 \rightarrow x = X_{max}$

بالتعويض في المعادلة الزمنية :

$X_{max} = X_{max}\cos(\omega(0)+\varphi)$

$\cos(\varphi) = 1 \rightarrow \varphi = 0$

ومنه المعادلة الزمنية تصبح :

$x = 2 . 10^{-2}\cos(\omega t)$

4- مناقشة طبيعة النظام :

- اذا كانت الاحتكاكات مهملة تكون حركة (S) اهتزازية جيبية غير متخامدة .
- اذا كانت الاحتكاكات ضعيفة تكون حركة (S) اهتزازية جيبية متخامدة .
- اذا كانت الاحتكاكات معتبرة يكون (S) في حالة نظام لادوري .

- مخطط تغيرات الفاصلة x بدلالة الزمن :

مما سبق نكتب : $x(cm) = 2\cos(\frac{2\pi}{T}t)$

t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
x (cm)	2	0	-2	0	2

www.sites.google.com/site/faresfergani
Fares_Fergani@yahoo.Fr

تمارين مقترحة

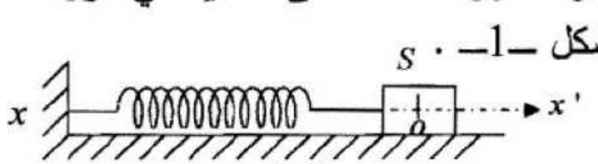
3AS U07 - Exercice 013

المحتوى المعرفي : تطور جملة مهتزة .

السنة الدراسية : 2016/2015

نص التمرين : (بكالوريا 2009 - رياضيات) (*)

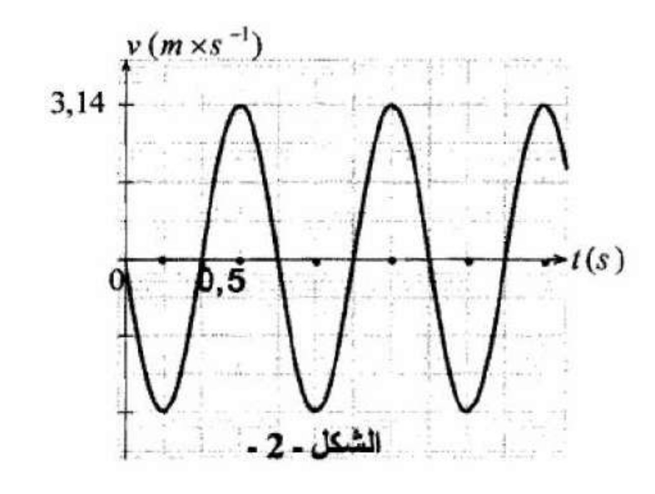
يتشكل نواس مرن أفقي من جسم نقطي (S) كتلته (m) ، مثبت إلى نابض مهمل الكتلة، حلقاته غير متلاصقة، ثابت مرونته $(K = 20N.m^{-1})$. يمكن لـ (S) الحركة دون احتكاك على مستوٍ أفقي مزود بمحور $\overline{xx'}$ مبدأه (O) ينطبق على وضع توازن (S). الشكل ـ1ـ .



-1- الشكل

نزيح (S) عن وضع توازنه في الاتجاه الموجب بمقدار X، ثم نتركه لحاله دون سرعة ابتدائية.

سمحت دراسة تجريبية بتسجيل حركة (S)، والحصول على مخطط السرعة $v = f(t)$ الموضح بالشكل ـ2ـ



- 2 - الشكل

1/ تحت أي شرط يمكن اعتبار المرجع الأرضي غاليليا بتقريب جيد ؟

2/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.

3/ بالاعتماد على البيان عين :

الدور الذاتي T_0 للجملة المهتزة ، النبض الذاتي ω_0 ، سعة الاهتزاز X ، الكتلة m .

ثم اكتب المعادلة الزمنية لحركة (S): $x = f(t)$.

4/ أثبت أن طاقة الجملة محفوظة(ثابتة) . احسب قيمتها.

حل التمرين